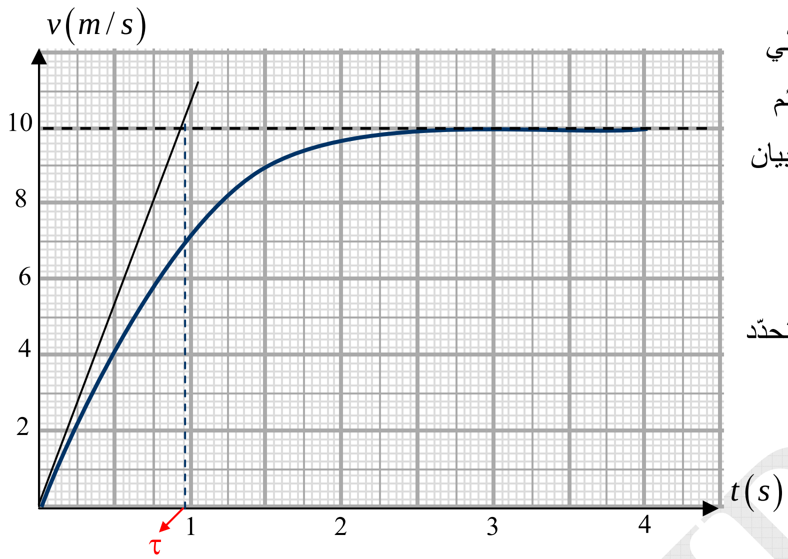
التمرين 27



1 - في المجال الزمني [0 ; 2,3 s] : النظام الانتقالي

في المجال الزمني [2,3 ; 4 s ..] : النظام الدائم

2 - أ) السرعة الحدّية : نرسم الخط المقارب الأفقي للبيان فيقطع محور السرعة في القيمة 10 m/s ،

ومنه السرعة الحدّية هي $v_l = 10 m/s$

ب) الزمن المميّز : نرسم المماس للبيان في المبدأ ونحدّد فاصلة تقاطعه مع الخط المقارب .

من البيان τ = 0,95 s

التمرين 28

1 – ثقل الجسم : $P = mg$ (1)

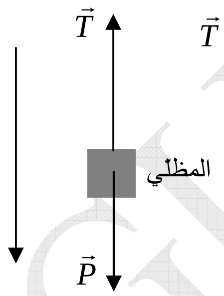
كتلة الجسم $m = \rho\ V = 8,9 \times 5 = 44,5 g$ ، وبالتعويض في (1) : $P = 44,5 \times 10^{-3} \times 9,81 = 4,36 \times 10^{-1} N$

2 – دافعة أرخميدس في الماء هي ثقل الماء الذي أزاحه الجسم : $\Pi = \rho_{eau} V g = 1 \times 5 \times 10^{-3} \times 9,81 = 4,9 \times 10^{-2} N$

3 – دافعة أرخميدس في الهواء هي ثقل الهواء الذي أزاحه الجسم : $\Pi = \rho_{air} V g = 1,3 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3} \times 9,81 = 6,37 \times 10^{-5} N$

التمرين 29

تتحرك الجملة بسرعة ثابتة ، إذن حركتها منتظمة .

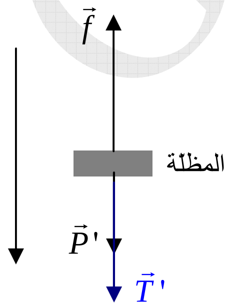


1 – بالنسبة للمظلي : يخضع إلى قوتين هما : ثقله $\vec{P}$ وتوترات الحبال التي تشدّه للمظلّة والتي تكافئ قوة واحدة $\vec{T}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة المظلي : $\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$. $(a = 0)$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور الموضّح في الشكل : $P - T = 0$ ، ومنه :

$T = P = mg = 60 \times 9,81 = 588,5 N$



2 – بالنسبة للمظلة : تخضع المظلّة لقوّة ثقلها $\vec{P}'$ ومقاومة الهواء $\vec{f}$ وتوتّر الحبال $\vec{T}'$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة المظلة :

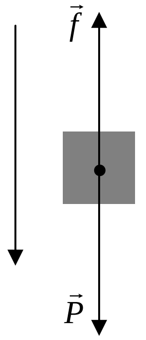
$\vec{P}' + \vec{T}' + \vec{f} = m'\,\vec{a}$. $(a = 0)$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور الموضّح في الشكل : $P' + T' - f = 0$ ،

ولدينا T = T’ (إهمال كتلة الحبال) ، ومنه :

$f = P' + T' = P' + T = 7 \times 9,81 + 588,5 = 657,2 N$

التمرين 30



1 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة مركز عطالة المظلّي : $\vec{P}+\vec{f}=m\,\vec{a}$

بإسقاط العلاقة الشعاعية على المحور الموضّح في الشكل : $P-f=m\,a$ $\quad(1)$

لدينا $a=\dfrac{dv}{dt}$ و $f=k\,v^2$ ، وبالتالي نكتب المعادلة التفاضلية : $mg-k\,v^2=m\dfrac{dv}{dt}$

بتقسيم طرفي المعادلة على m ، نكتب : $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{k}{m}\,v^2=g$ $\quad(2)$

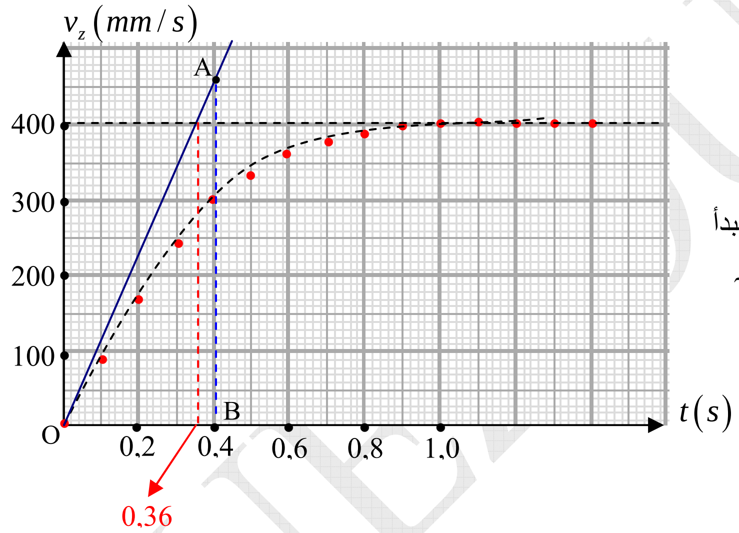
2 – قوة الثقل لا تتغيّر أثناء الحركة . في بداية السقوط تكون سرعة الجسم معدومة ، وأثناء النزول تزداد سرعته ، وبالتالي تزداد قوة الاحتكاك . وفي اللحظة التي تصبح فيها $f=P$ يصبح $a=0$ (العلاقة 1) ، أي $\dfrac{dv}{dt}=0$ ، وتصبح الحركة منتظمة .

3 - المعامل k هو معامل ثابت ، إذن يمكن أن نحسبه في أية لحظة . مثلا عندما تكون السرعة ثابتة يكون $\dfrac{dv}{dt}=0$

بالتعويض في العلاقة (2) نكتب : $\dfrac{k}{m}\,v^2=g$ ، وبالتالي $k=\dfrac{mg}{v^2}=48,4\ kg.m^{-1}$

التمرين 31

1 - أ) نعلم أن السرعة الابتدائية هي سرعة الجسم في اللحظة $t=0$. من البيان نستنتج $v_0=0$.



ب) من البيان نلاحظ أن بعد اللحظة $t=0,9$ s

تصبح سرعة الجسم ثابتة ، و هذه السرعة هي السرعة الحديّة ،

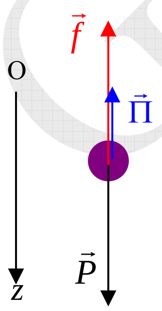
$v_l=400\ mm/s=0,4\ m/s$

2 - الزمن المميّز للسقوط : فاصلة تقاطع المماس للبيان في المبدأ مع الخط المقارب هي قيمة الزمن المميّز للسقوط . $\tau=0,36$ s

3 - التسارع هو مشتق السرعة بالنسبة للزمن ، فهو يمثّل ميل المماس لبيان السرعة .

$$a_0=\frac{AB}{OB}=\frac{0,450}{0,4}=1,12\ m/s^2$$

4 - من المعادلة التفاضلية $\dfrac{dv_z}{dt}=g\left(1-\rho_f\dfrac{V_s}{m}\right)-\dfrac{k}{m}v_z$ نستنتج أن عبارة الزمن المميّز للسقوط هو $\tau=\dfrac{m}{k}$



حيث ρ_f : الكتلة الحجمية للزيت ، V_s : حجم الكرة

وبالتالي $k=\dfrac{m}{\tau}=\dfrac{13,3\times10^{-3}}{0,36}=0,037\ kg/s$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن $\vec{f}+\vec{\Pi}+\vec{P}=m\,\vec{a}$ ، ثم بإسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي Oz :

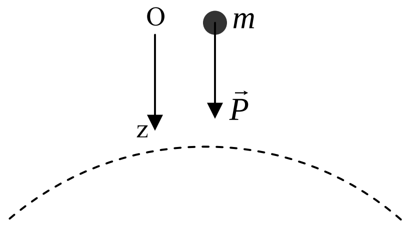
$mg-kv-\Pi=m\dfrac{dv}{dt}$ ، ومن أجل $\dfrac{dv}{dt}=0$ تكون $v=v_l=0,4\ m/s$ ، ومنه

$$\Pi=mg-kv_l=13,3\times10^{-3}\times9,8-0,037\times0,4=1,15\times10^{-1}N$$

التمرين 32

1 - أثناء السقوط لا يخضع الجسم إلا لقوة ثقله (عدم وجود أية مقاومة ، وكأن الجسم يسقط داخل أنبوب نيوتن) . أنبوب نيوتن هو أنبوب زجاجي يوجد داخله 3 أجسام مختلفة : كرة خشبية صغيرة ، كرة معدنية صغيرة ، ريشة طائر . لما نفرّغ الأنبوب من الهواء نلاحظ أن هذه الأجسام كلها تسقط بنفس الشكل ، أي عندما نقلب الأنبوب شاقوليا ، فإنها تصل إلى أسفل الأنبوب في نفس الوقت . وهذا ما يحدث لهذه الأجسام بجوار سطح القمر . أنبوب نيوتن موجود في كل المخابر .

الجسم يسقط سقوطا حرّا على سطح القمر .



2 – المعادلة التفاضلية : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن $\vec{P} = m\,\vec{a}$

بإسقاط العلاقة على Oz : $mg = m\dfrac{dv}{dt}$ ، وبالتالي : $\dfrac{dv}{dt} = g$

3 – المعادلات الزمنية : المقصود هو : $z(t)$,$v(t)$, $a(t)$

$a(t) = g$ ، بالمكاملة بالنسبة للزمن واستعمال الشروط الابتدائية ، نحصل على معادلة السرعة :

$v(t) = gt + v_0$ ، ، بالمكاملة بالنسبة للزمن واستعمال الشروط الابتدائية ، نحصل على معادلة الفاصلة :

$$z(t) = \frac{1}{2}t^2 + v_0 t + z_0$$

4 - مدّة السقوط : حسب العبارة : **" ترك رجل الفضاء جسما يسقط..."** نفهم أن السرعة الابتدائية معدومة .

لدينا : $h = \dfrac{1}{2}gt^2$ ، حيث t هي مدّة السقوط ، ومنه $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{4}{1,6}} = 1,58\ s$

سرعة مركز عطالة الجسم : $v = gt = 1,6 \times 1,58 = 2,53\ m/s$

التمرين 33

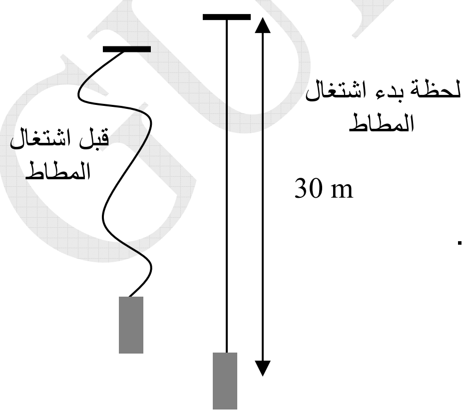
1 - بما أن السقوط حر ، إذن الشخص لا يخضع إلا لقوّة ثقله أثناء سقوطه :

القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} = m\vec{g} = m\,\vec{a}$ ، ومنه $\vec{a} = \vec{g}$ ، فالتسارع إذن مستقل عن الكتلة .

معادلات الحركة : $a(t) = g$ ، بالمكاملة بالنسبة للزمن واستعمال الشروط الابتدائية ، نحصل على معادلة السرعة :

$v(t) = gt + v_0$ ، ، بالمكاملة بالنسبة للزمن واستعمال الشروط الابتدائية ، نحصل على معادلة الفاصلة :

$$z(t) = \frac{1}{2}t^2 + v_0 t + z_0$$



إحداثيات تسارع الشخص هي $\vec{a}(0,0,a_z) = (0,0,g)$

ومنه المسار هو الشاقول (حركة مستقيمة) .

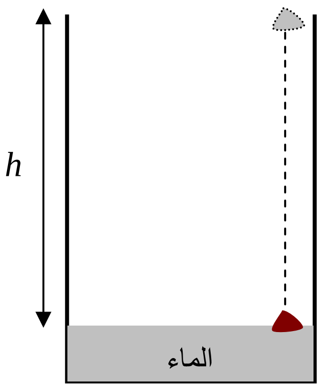
2 – قبل أن يبدأ المطاط في التأثير على الشخص يكون هذا الأخير خاضعا فقط لقوّة ثقله .

أ) مدّة السقوط : $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{60}{9,8}} = 2,47\ s$

ب) السرعة : $v = gt = 9,8 \times 2,47 = 24,2\ m/s$

جـ) الطاقة الحركية : $E_C = \dfrac{1}{2}mv^2 = 0,5 \times 75(24,2)^2 = 2196\ J$

التمرين 34



نفرض أن الحجر تركناه يسقط من حافة فوهة البئر . ثم أن عمق البئر المطلوب هو فقط من حافة فوهة البئر حتى مستوى سطح الماء .

نفرض كذلك أن الحجر سقط في البئر سقوطا حرّا .

1 - $h = \frac{1}{2}gt^2 = 0,5\times 9,8\times 4 = 19,6m$

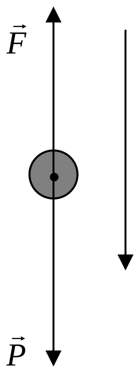
2 - $v = gt = 9,8\times 2 = 19,6\ m/s$ (سرعة وصول الحجر إلى سطح الماء)

3 – نفرض أن أذن الشخص الذي ترك الحجر يسقط في البئر كانت بجوار حافة البئر .

ينتشر الصوت بسرعة ثابتة ، إذن $t_s = \frac{h}{v_s} = \frac{19,6}{340} = 0,057\ s$

يصل الصوت إلى أذن الشخص بعد مدة زمنية قدرها $t' = t + t_s = 2 + 0,057 = 2,057\ s$

التمرين 35



1 - ثقل قطرة الماء : $P = mg = \rho_{eau}Vg$

دافعة أرخميدس التي تؤثر على الكرة في الهواء : $\Pi = \rho_{air}Vg$.

نقارن بين ثقل القطرة ودافعة أرخميدس بقسمة الثقل على الدافعة $\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} = \frac{1}{1,3\times 10^{-3}} = 769$

نلاحظ أن الثقل أكبر بكثير من دافعة أرخميدس ، لهذا يمكن إهمالها أمام الثقل .

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموضح في الشكل :

$P - F = m\,a$

$mg - 6\pi r\eta v = m\frac{dv}{dt}$ ، ومنه المعادلة التفاضلية المطلوبة : $\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi r\eta}{m}v = g$ (1)

3 – السرعة الحدّية : تبلغ الكرة سرعة حدية ، معناه تصبح سرعتها ثابتة ، وبالتالي : $\frac{dv}{dt} = 0$

باستعمال العلاقة (1) نكتب $\frac{6\pi r\eta}{m}v = g$ ، ومنه $v_l = \frac{mg}{6\pi r\eta}$ (2)

نحسب كتلة قطرة الماء : القطرة عبارة عن كرة إذن حجمها هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، كتلتها : $m = \rho_{eau}\times V$

$$m = \rho_{eau}\times\frac{4}{3}\pi r^3 = 1\times\frac{4}{3}\times 3,14\times\left(20\times 10^{-4}\right)^3 = 3,35\times 10^{-8}g$$

بالتعويض في العلاقة (2) $v_l = \frac{3,35\times 10^{-11}\times 9,8}{6\times 3,14\times 20\times 10^{-6}\times 1,8\times 10^{-5}} = 4,8\times 10^{-2}\ m/s$

التمرين 36

1 - وحدة k و λ : لدينا مثلا $f = k\,v$ ، ومنه $k = \frac{f}{v}$ ، وبالتحليل البعدي : $k = \frac{[K][M][T]^{-2}}{[M][T]^{-1}} = [K][T]^{-1}$

لأن النيوتن هو كتلة مضروبة في تسارع ، أي $kg\ .\ m/s^{-2}$

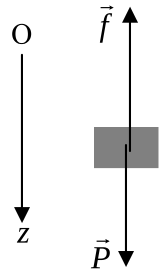
وبالتالي وحدة k و λ هي kg/s

ملاحظة : هناك وحدة أخرى لـ k و λ إذا كان الاحتكاك من الشكل $f = k\,v^2$ ، وهي kg/m

2 – السرعة الحدّية قبل فتح المظلة $v_0 = \frac{mg}{k} = \frac{700}{14} = 50\ m/s$

3 - السرعة الحدّية بعد فتح المظلة $v_1 = \frac{mg}{\lambda} = \frac{700}{350} = 2\ m/s$

4 - تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (مظلي + مظلة مفتوحة) :



$\vec P + \vec f = m\,\vec a$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور Oz ، $P - f = m\,a$

$mg - \lambda\, v(t) = m\frac{dv(t)}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة على λ ، نكتب : $\frac{mg}{\lambda} - v(t) = \frac{m}{\lambda}\frac{dv(t)}{dt}$ (1)

ولدينا $v_1 = \frac{mg}{\lambda}$ ، وبالتالي تصبح العلاقة (1) $v(t) - v_1 = -\frac{m}{\lambda}\frac{dv(t)}{dt}$ (2)

إن حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل : $v(t) = Ae^{\alpha t} + B$ (3)

بالتعويض في المعادلة (2) : $Ae^{\alpha t} + B - v_1 = -\frac{m}{\lambda}A\alpha e^{\alpha t}$

$Ae^{\alpha t}\left(1+\frac{m}{\lambda}\alpha\right) + B - v_1 = 0$ ، ولكي تكون هذه المعادلة محققة يجب أن يكون $\left(1+\frac{m}{\lambda}\alpha\right) = 0$ و $B - v_1 = 0$ ، ومنه :

$\alpha = -\frac{\lambda}{m}$ و $B = v_1$.

لكي نحدّد A نستعمل الشروط الابتدائية ، أي عند $t = t_0$ كان $v = v_0$ ، حيث v_0 هي السرعة الحدية قبل فتح المظلة . وبالتعويض في المعادلة (3) : $v_0 = Ae^{\alpha t_0} + B$ ، ومنه $A = \frac{v_0 - v_1}{e^{-\frac{\lambda}{m}t_0}}$

وبالتالي يكون حل المعادلة التفاضلية : $v(t) = (v_0 - v_1)e^{-\frac{\lambda}{m}(t - t_0)} + v_1$

للمزيد : تمثيل السرعة بدلالة الزمن قبل وبعد فتح المظلة