

التمرين 15

السرعة : $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ ، $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ ، $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r}$ ، حيث M : كتلة الكوكب الجاذب ، m كتلة القمر الصناعي ، G : الثابت الكوني . (ارجع للدرس)

التمرين 16

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

التمرين 17

المسافة $r_A = 7330 \text{ km}$ هي المسافة بين مركز الأرض وأبعد نقطة من مدار القمر الصناعي .
المسافة $r_P = 6610 \text{ km}$ هي المسافة بين مركز الأرض وأقرب نقطة من مدار القمر الصناعي .

$$(1) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}$$

$$\text{حيث } a = \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{7330 + 6610}{2} = 6970 \text{ km}$$

يمكن حساب الدور بهذه العلاقة ، ويمكن أن نجد عبارة أخرى للدور كما يلي :

على سطح الأرض تكون قوة التجاذب بين القمر الصناعي والأرض $F = G\frac{mM_T}{R_T^2}$ ، حيث أن F هي قوة ثقل القمر الصناعي على

سطح الأرض ، ومنه : $F = mg_0$ ، حيث g_0 هو تسارع الجاذبية الأرضية على سطح الأرض .

$$\text{بالتعويض نجد : } g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \text{ ، ومنه : } GM_T = g_0 R_T^2 \text{ . وبالتعويض في العلاقة (1) نجد } T = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{a^3}{g_0}}$$

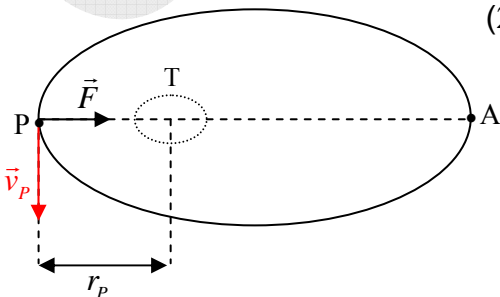
$$\text{تطبيق عددي : } T = \frac{6,28}{64 \times 10^5}\sqrt{\frac{(6970 \times 10^3)^3}{9,81}} = 96,1 \text{ mn}$$

السرعة في أدنى نقطة من المدار :

$$(2) \quad F = G\frac{mM}{r_P^2}$$

$$(3) \quad F = m\frac{v_P^2}{r_P}$$

$$\text{وبحسب القانون الثاني لنيوتن ، فإن هذه القوة هي } F = m\frac{v_P^2}{r_P} \text{ ، بالمساواة بين (2) و (3) } v_P = \sqrt{\frac{GM}{r_P}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{r_P}}$$



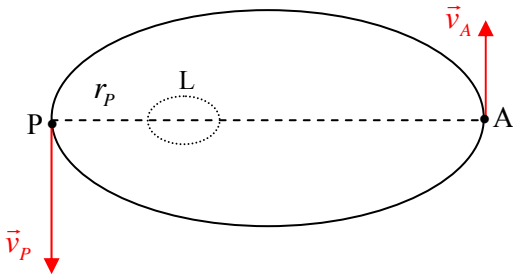
تطبيق عددي : $v_p = 64 \times 10^5 \sqrt{\frac{9,81}{6610 \times 10^3}}$ ، $v_p = 28 \times 10^3 \text{ km/h}$

التمرين 18

نصف قطر القمر $R_L = 1728 \text{ km}$

$$r_P = R_L + 100 = 1728 + 100 = 1828 \text{ km}$$

$$r_A = R_L + 125 = 1728 + 125 = 1853 \text{ km}$$



1 - السرعة العظمى : $v_P = \sqrt{\frac{GM_L}{r_P}} = R_L \sqrt{\frac{g_{0,L}}{r_P}} = 1728 \times 10^3 \sqrt{\frac{1,63}{1828 \times 10^3}} = 5874 \text{ km/h}$

السرعة الصغرى : $v_A = \sqrt{\frac{GM_L}{r_A}} = R_L \sqrt{\frac{g_{0,L}}{r_A}} = 1728 \times 10^3 \sqrt{\frac{1,63}{1853 \times 10^3}} = 5834 \text{ km/h}$

2 - الدور : $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_L}}$ ، ولدنيا $a = R_L + \frac{h_A + h_P}{2} = 1840,5 \text{ km}$ ، تسارع الجاذبية : $g_{0,L} \cdot GM_L = R_L^2 g_{0,L}$

على سطح القمر $g_{0,L} = \frac{9,81}{6} = 1,63 \text{ m.s}^{-2}$ ، ومنه :

$$T = 118,5 \text{ mn} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{R_L} \sqrt{\frac{a^3}{g_{0,L}}} = \frac{6,28}{1728 \times 10^3} \sqrt{\frac{(1840,5 \times 10^3)^3}{1,63}}$$

التمرين 19

1 - النقطة A تنتمي لسطح الأرض ، أي أن $OA = R_T$

النقطة A تدور حول المحور Oz صانعة دائرة نصف قطرها r ، حيث $r = R_T \cos \alpha$

تدور النقطة A بنفس السرعة الزاوية للأرض :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4} = \frac{6,28}{86164} = 7,28 \times 10^{-5} \text{ rd.s}^{-1}$$

2 - أ) السرعة الخطية للنقطة A :

$$v_A = \omega r = \omega R_T \cos \alpha = 7,28 \times 10^{-5} \times 6,4 \times 10^6 \cos \alpha = 465,9 \cos \alpha$$

تسارع النقطة A هو تسارع ناظمي لأن حركتها دائرية منتظمة .

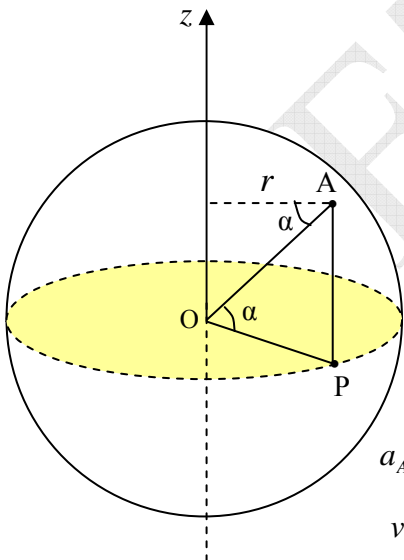
$$a_A = a_n = \omega^2 r = \omega^2 R_T \cos \alpha = (7,28 \times 10^{-5})^2 \times 6,4 \times 10^6 \cos \alpha = 3,39 \times 10^{-2} \cos \alpha$$

ب) عند خط الإستواء $\alpha = 0$ ، وبالتالي : $v_E = 465,9 \cos 0 = 465,9 \text{ m/s} \approx 1677 \text{ km/h}$

$$a_E = 3,39 \times 10^{-2} \text{ rd/s}^2$$

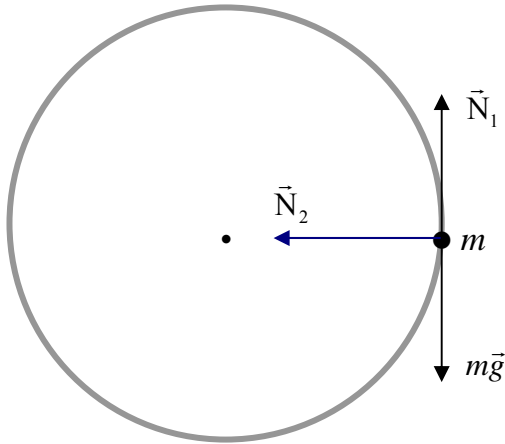
ج) عند أحد القطبين $r = 0$ ، وبالتالي $v_N = 0$ ، $a_N = 0$

د) عند خط الاستواء $\frac{g}{a_E} = \frac{9,8}{3,39 \times 10^{-2}} = 112$



التمرين 20

القوة \vec{N}_2 هي القوة التي يضغط بها مسند الكرسي على ظهر المرأة ، وهي القوة المكافئة لقوة الطرد المركزي التي تخضع لها المرأة



$$(1) \quad N_2 = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R \quad . \quad \text{عندما تدور العجلة .}$$

$$\text{لدينا } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N \quad \text{حيث } N \text{ هو التواتر } (N = \frac{1}{T})$$

والتواتر هو عدد الدورات في الثانية أي $N = \frac{5}{60} \text{ tr/s}$ ، وبالتالي :

$$\omega = 2\pi \frac{5}{60} = 0,52 \text{ rd/s}$$

$$N_2 = 60 \times (0,52)^2 \times 8 \approx 130 \text{ N} \quad (1) \quad \text{بالتعويض في العلاقة}$$

القوة \vec{N}_2 هي القوة المكافئة لثقل المرأة ، ومنه $N_2 = P = m g = 60 \times 9,81 = 588,6 \text{ N}$

$$F = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{(588,6)^2 + (130)^2} = 602,8 \text{ N} \quad \text{محصلة هاتين القوتين :}$$

التمرين 21

تصحيح (الطبعة الأولى) : العلاقة المعطاة في التمرين غير متجانسة : $\omega^2 = \frac{Gm}{\sqrt{3} r^2}$. نجري لهذه العلاقة تحليلا بعديا :

$$\text{بالنسبة لـ } \omega^2 \text{ لدينا : } \omega^2 = \frac{v^2}{R^2} = \frac{[M]^2 [T]^{-2}}{[M]^2} = [T]^{-2}$$

بالنسبة لـ $\frac{Gm}{\sqrt{3} r^2}$: $\frac{[K][M][T]^{-2}[M]^2[K]^{-2}[K]}{[M]^2} = [M][T]^{-2}$ ، لأن وحدة G : $\text{N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ، ولكن النيوتن ليس من

وحدات الجملة الدولية ، نعوضه بـ kg m s^{-2} ، لأن $F = m a$. جملة الوحدات الدولية هي MKSA (متر - كلغ - ثانية - أمبير) أضيفت لها ثلاثة وحدات أخرى (المول ، الكلفين ، والقنديل : وحدة الشدة الضوئية) ، ومنه عدم التجانس وبالتالي العلاقة خاطئة .

إيجاد العلاقة الصحيحة : كل نجم يخضع إلى قوتي تجاذب مع النجمين الآخرين .

نحسب المسافة بين كل نجمين ، فمثلا بين النجمين A و C

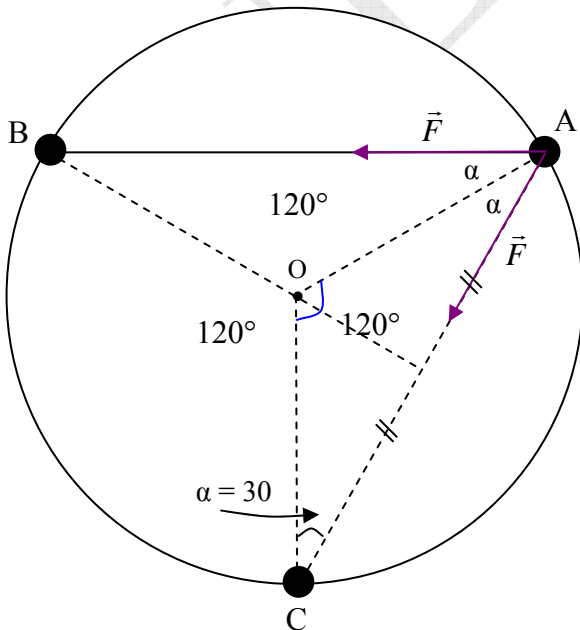
$$AC = 2r \cos \alpha = 2r \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

$$(1) \quad F = G \frac{m^2}{(r\sqrt{3})^2} = G \frac{m^2}{3r^2} \quad \text{قوة التجاذب بين هذين النجمين هي :}$$

بإهمال تأثيرات الكواكب الأخرى ، تكون محصلة القوتين \vec{F} :

$$(1) \quad 2F \cos 30 = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{3} Gm}{3 r^3} = \frac{Gm}{\sqrt{3} r^3} \quad \text{، ومنه : } 2G \frac{m^2}{3 r^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = m\omega^2 r$$



التمرين 22

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_L + h)^3}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{3(R_L + h)^3}{4\pi GR_L^3 \rho}} \quad \rho = \frac{M_L}{V_L} \quad \text{، دور القمر الصناعي :}$$

$$\rho = \frac{3\pi(R + h)^3}{GR^3 T^2} \approx 3334 \text{ kg/m}^3 \quad \text{ومنه :}$$

التمرين 23

1 - بإهمال تأثيرات الكواكب الأخرى والتأثير الثقالي يكون كل نجم خاضعا لقوة $F_{A/B} = F_{B/A}$

$$\vec{F}_{B/A} = m_1 \vec{a}'_n \quad ، \quad \vec{F}_{A/B} = m_2 \vec{a}_n$$

2 - النجمان يدوران حول مركز كتلتهما .

نحدّد أولا مركز الكتلة ، والمسمى كذلك مركز الثقل ، والمكافئ في

الرياضيات لمركز الأبعاد المتناسبة (المرجح) .

يوجد مركز الكتلة على القطعة المستقيمة AB الواصلة بين مركزي النجمين .

نفرض أن مركز الكتلة يبعد على عن النقطة A بالمسافة x . إذن

$$(\text{قانون مركز الكتلة}) \quad m_1 x = m_2 (r_1 + r_2 - x)$$

$$\text{ومنه :} \quad x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (r_1 + r_2)$$

قوة التجاذب بين النجمين هي : $F_{A/B} = F_{B/A} = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$

$$(1) \quad G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_1 \frac{v_1^2}{x} = \frac{m_1 v_1^2}{\frac{m_2}{m_1 + m_2} (r_1 + r_2)}$$

$$(2) \quad v_1^2 = \omega^2 x^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \times \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} (r_1 + r_2) \right)^2 \quad \text{من جهة أخرى لدينا}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} (r_1 + r_2)^3 \quad \text{بتعويض عبارة } v_1^2 \text{ من العلاقة (2) في العلاقة (1) نجد :}$$

3 - يمكن بواسطة الملاحظات والقياسات الفلكية أن نقيس r_1 ، r_2 ، T ، وبالتالي نستنتج مجموع كتلتي النجمين .

التمرين 24

$$\text{حسب القانون الثالث لكبلر :} \quad \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \quad \text{، ومنه } 0,25 = \frac{(238020)^3}{(377400)^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \quad \text{، ومنه } \frac{T_1}{T_2} = 0,5 \quad \text{، أي} \quad T_2 = 2 T_1$$

التمرين 25

1 - القوة المؤثرة على القمر الصناعي هي قوة تجاذبه مع الأرض ، وهي قوة متجهة نحو مركز الأرض ، إذن تسارعه متجه نحو مركز الأرض ، وبالتالي هو تسارع ناظمي ، إذن حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة .

$$2 - \text{قوة الجذب بين القمر الصناعي والأرض } F = G \frac{mM_T}{(R+H)^2} = m \frac{v^2}{(R+H)} \quad (1)$$

لدينا $v^2 = \omega^2 (R+H)^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (R+H)^2$ وبالتعويض في (1) : $\frac{4\pi^2}{T^2} (R+H)^2 = \frac{GM_T}{R+H}$ ، ومنه :

$$\frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} = Cst \quad (\text{معناه ثابت}).$$

ثابت التناسب في القانون الثالث لكبلر هو $K = \frac{4\pi^2}{GM_T}$.

3 - أ) يتميز القمر ميثيوسات بدوره الذي يساوي الدور اليومي للأرض (86146 s) ، أي أنه يبقى دائما مستقرا فوق نقطة من سطح الأرض على خط الإستواء ، لأنه يدور شرقا ، أي في نفس جهة دوران الأرض .

ب) يسمى هذا النوع من الأقمار الصناعية الأقمار المستقرة أرضيا .

ج) يمثل الدور 23 h 56 mn 4 s دور الأرض اليومي أي الزمن اللازم لمرورين متعاقبين لنقطة من سطح الأرض مقابلا لنجم ثابت .

د) يمكن أن نحسب زمن دورة كاملة للأرض حول نفسها (الدور اليومي) ، ويمكن أن نحسب زمن دورة كاملة للأرض حول الشمس ، ثم نقسم هذا الزمن على عدد الدورات التي قامت بها الأرض حول نفسها أثناء دورانها حول الشمس ، فنجد أن هناك فرقا بين المدتين . نعلم أن الأرض تدور حول نفسها في نفس الجهة التي تدور فيها حول الشمس ، فإثناء هذا الدوران وخلال 365,25 يوم شمسي تنجز الأرض دورة زيادة بالنسبة للنجوم الثابتة وبالتالي يكون الدور اليومي $T = 86400 \times \frac{365,25}{366,25} = 86164s$

إذن ليس 24 h .

$$4 - \text{كوسموس : } \frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{((6400+19100) \times 10^3)^3}{(40440)^2} \approx 10^{13}$$

$$\text{مير : } \frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{((6400+500) \times 10^3)^3}{(5700)^2} \approx 10^{13}$$

$$\text{ميثيوسات : } \frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{((6400+35800) \times 10^3)^3}{(86160)^2} \approx 10^{13}$$

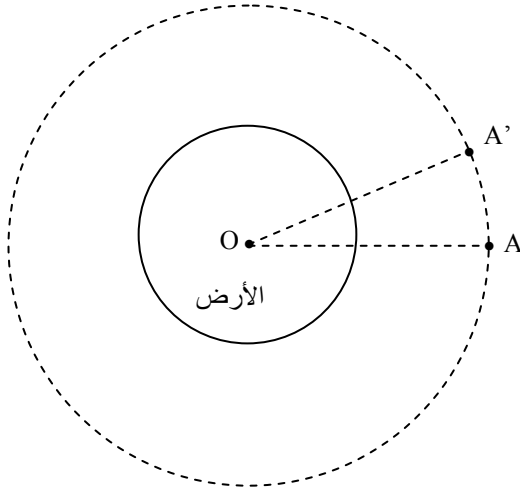
$$5 - \frac{GM_T}{4\pi^2} = 10^{13} \quad , \quad \text{ومنه } M_T = \frac{4\pi^2 \times 10^{13}}{G} = \frac{40 \times 10^{13}}{6,67 \times 10^{-11}} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$1 - \text{السرعة} : v_s = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + H}} = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6800 \times 10^3}} \quad , \quad v_s = 27360 \text{ km/h}$$

$$2 - \text{الدور} : T_s = 2\pi \sqrt{\frac{(R+H)^3}{GM_T}} = 6,28 \sqrt{\frac{(68 \times 10^5)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}} \quad , \quad T_s = 92,7 \text{ mn}$$

3 - بما أن القمر الصناعي يدور نحو الشرق ، فإنه يدور في نفس جهة دوران الأرض .

نعتبر النقطة A هي النقطة التي يمر بها القمر الصناعي في اللحظة $t = 0$ ، هذه النقطة واقعة على الشاقول المار بالنقطة A' من سطح الأرض على خط الإستواء .



عندما يصبح القمر الصناعي للمرة الأولى فوق النقطة A التي تكون قد انتقلت إلى الوضع A' يكون حينذاك القمر الصناعي قد أنجز دورة زيادة عن عدد دورات الأرض (الأرض أنجزت جزءا من الدورة والقمر الصناعي أنجز نفس الجزء زائد دورة ، إذن الفرق هو دورة)

ليكن t_1 هي المدة التي استغرقها القمر الصناعي حينذاك ، إذن :

$$(1) \quad t_1 = (n+1)T_s$$

$$(2) \quad t_1 = nT$$

حيث T هو دور الأرض حول نفسها . n : عدد الدورات

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج $n = \frac{T_s}{T - T_s}$ ، وبالتعويض في العلاقة (2) مثلا ، نجد

$$t_1 = T \frac{T_s}{T - T_s} = 1440 \times \frac{92,7}{1440 - 92,7} = 99 \text{ mn}$$

نفس النقطة .

1 - في كل دورة ينقص ارتفاع القمر الصناعي عن الأرض بـ $\frac{1}{1000}$ من قيمة الارتفاع الذي قبله ، إذن بالنسبة للارتفاع

$$h_0 = 400 \text{ km} \quad \text{والارتفاع الذي يليه (أي بعد دورة واحدة) } h_1 \text{ يمكن أن نكتب العلاقة من الآن } h_1 = h_0 - \frac{h_0}{1000}$$

من العلاقة $h_1 = h_0 \times \frac{999}{1000}$ ، نستنتج أن الارتفاعات عبارة عن حدود متتالية هندسية أساسها $0,999 = 1 - \frac{1}{1000}$ ، وحدها الأول

$$h_0 = 400 \text{ km} \quad , \quad \text{حيث } h_n = h_0 \times \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^n \quad \text{و } h_{n+1} = h_n \times \left(1 - \frac{1}{1000}\right) \quad \text{وهي العلاقة المطلوبة .}$$

3 - لدينا $h_n = h_0 \times \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^n$. نحسب قيمة n (عدد دورات القمر الصناعي) من أجل $h_n \approx 100 \text{ km}$

$$100 = 400(0,999)^n \quad , \quad \text{ومنه } n = \frac{\ln 0,25}{\ln 0,999} \approx 1386 \quad \text{ليس حدا لهذه المتتالية ، لكنه قريب من أحد الحدود}$$