الكتاب الأول — **التطورات الرتيبة**

الوحدة 05 — **تطور جملة ميكانيكية**

الدرس الأول

GUEZOURI Aek – lycée Maraval - Oran

## ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إني استوعبت هذا الدرس

1 – يجب أن أعرف كيفية تحديد جملة ميكانيكية حسب ما يُطلب مني في السؤال .

2 – يجب أن أفرق بين المرجع من جهة ومعلم الفضاءات والأزمنة من جهة أخرى .

3 – يجب أن أعرف كيفية حساب سرعة لحظية لمتحرك في نقطة من مساره بواسطة مخطط .

4 – يجب أن أعرف كيفية حساب تسارع لحظي لمتحرك بواسطة التغير في شعاع السرعة .

5 – يجب أن أعرف القوانين الثلاثة لنيوتن وكيفية تطبيقها على الجُمَل الميكانيكية .

6 – يجب أن أعرف ما هي القوى التي تجعل القمر الصناعي مستقرا على مداره حول الأرض .

7 – يجب أن أعرف القوانين الثلاثة لكبلر .

## ملخص الدرس

### القوى الداخلية والقوى الخارجية في جملة

القوى الداخلية في جملة ميكانيكية تنعدم مثنى مثنى ، وتبقى القوى الخارجية هي المسؤولة عن حركة هذه الجملة .

**المعلم والمرجع** : حجرة المخبر مرجع ندرس بالنسبة له حركة سقوط كرية ، هذا لا يكفي لدراسة عناصر الحركة ، لهذا نزوّد المرجع بمعلم ، مثلا $(O,\vec{k})$ . ، ثم نختار لحظة نعتبرها مبدأ للزمن .

المرجع السطحي أرضي : نقطة من سطح الأرض (المخبر مثلا) : ننسب إليه الحركات على الأرض والتي لا تدوم كثيرا .

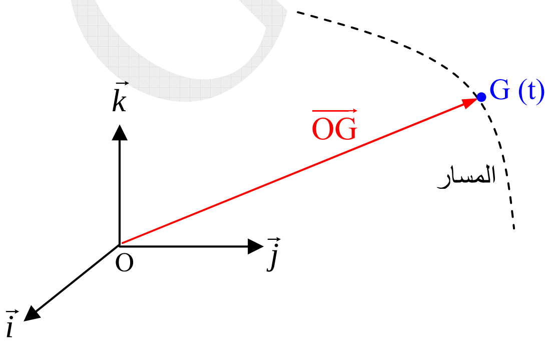
المرجع المركزي أرضي : مركز الأرض مزود بمعلم محاوره متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة

المرجع المركزي شمسي : مركز الشمس مزود بمعلم محاوره متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة

### عناصر الحركة :

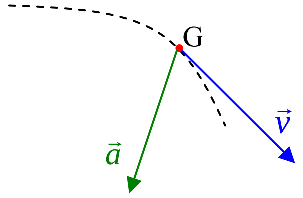
**شعاع الموضع** : هو الشعاع $\overrightarrow{OG}$ الذي يجمع بين مبدأ الإحداثيات وموضع مركز عطالة الجسم في اللحظة (t)

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$




**شعاع السرعة** : هو مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

وهو مماس للمسار في كل لحظة .



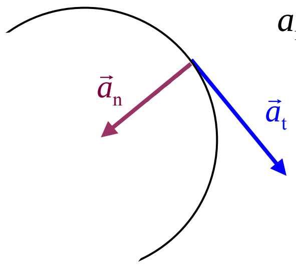
**شعاع التسارع** : هو مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ ، وهو المشتق الثاني لشعاع الموضع بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \qquad \vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \qquad \vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

## التسارع المماسي والناظمي :

في معلم فريني (Frenet) التسارع المماسي $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ ، والتسارع الناظمي (المركزي) $a_n = \dfrac{v^2}{R}$




## طبيعة الحركة :

$\vec{a} \times \vec{v} > 0$ : الحركة متسارعة

$\vec{a} \times \vec{v} < 0$ : الحركة متباطئة

$\vec{a} \times \vec{v} = 0$ : الحركة مستقيمة منتظمة إذا كان $\vec{a} = 0$ ، ودائرية منتظمة إذا كان $\vec{a} \perp \vec{v}$

| الحركة الدائرية المنتظمة | الحركة المستقيمة المنتظمة | الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام |
|---|---|---|
| $\alpha = \omega t$ | $d_{A \to B} = vt$ | $d_{A \to B} = \dfrac{1}{2}at^2 + v_A t$ |
| $\omega = \dfrac{v}{R}$ | $v = Cst$ | $v_B - v_A = at$ |
| $a = a_n$ | $a_t = 0$ | $v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ |
| $a_t = 0$ | $a_n = 0$ | $a = a_t$ |
| $v = Cst \; ; \; \vec{v} \neq Cst$ | | $a_n = 0$ |

## قوانين نيوتن :

**القانون الأول** : في معلم غاليلي إذا كان شعاع سرعة مركز عطالة جملة ثابتا ، فإن مجموع القوى الخارجية المؤثرة على الجملة يكون معدوما . والعكس كذلك صحيح $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_G = Cst$

**القانون الثاني** :

في معلم غاليلي يكون مجموع القوى الخارجية المؤثرة على جملة كتلتها $m$ متناسبا في كل لحظة مع تسارع الجملة ، أي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

**القانون الثالث** :

إذا أثرت جملة A بفعل ميكانيكي على جملة B مُنَمذج بقوة $\vec{F}_{A/B}$ ، فإن الجملة B تؤثر في نفس الوقت على الجملة A بفعل مُنَمذج بقوة $\vec{F}_{B/A}$ ، بحيث يكون هذان الفعلان متعاكسين ومربوطين بالعلاقة : $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

## حركة الكواكب والأقمار الصناعية

يدور كوكب في مسار دائري (فرضا) حول الشمس بسرعة $v = \sqrt{G\dfrac{M_s}{r}}$

G : ثابت الجذب العام ، $M_s$ كتلة الشمس ، $r$ البعد بين مركزي الشمس والكوكب .

يدور قمر صناعي في مسار دائري (فرضا) حول الأرض بسرعة $v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}}$

G : ثابت الجذب العام ، $M_T$ كتلة الأرض ، $r$ البعد بين مركز الأرض والقمر الصناعي .

زمن دورة (الدور) : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$ ، M : كتلة الشمس أو الأرض .

## قوانين كبلر

**القانون الأول** : في المرجع الشمسي مركزي تتحرك الكواكب في مدارات إهليليجية حول الكوكب الجاذب بحيث يكون هذا الأخير أحد محرقيها .

**تكملة حديثة للقانون الأول** : في المرجع الأرضي مركزي تدور الأقمار الصناعية في مدارات إهليليجية أحد محرقيها مركز الأرض .

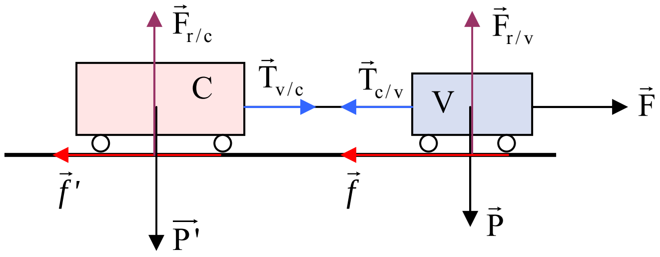
**القانون الثاني** : (قانون المساحات) : يمسح المستقيم الواصل بين مركز الكوكب السيار ومركز الكوكب الجاذب مساحات متساوية في مُدَد زمنية متساوية .

**القانون الثالث** : في مرجع شمسي أرضي ، تكون النسبة بين مربعات أدوار الكواكب ومكعبات أنصاف المحاور الكبيرة لمداراتها ، دائما ثابتة .

لا تتعلّق هذه النسبة إلا بالكوكب أو النجم الجاذب . $\dfrac{T^2}{a^3} = k$

## 1 - القوى الداخلية والخارجية

القوى الداخلية في جملة ميكانيكية تنعدم مثنى مثنى ، وتبقى القوى الخارجية هي المسؤولة عن حركة هذه الجملة .




الجملة (سيارة : V) القوى الخارجية هي :

$\vec{P}$ ، $\vec{f}$ ، $\vec{T}_{c/v}$ ، $\vec{F}_{r/v}$ ، $\vec{F}$

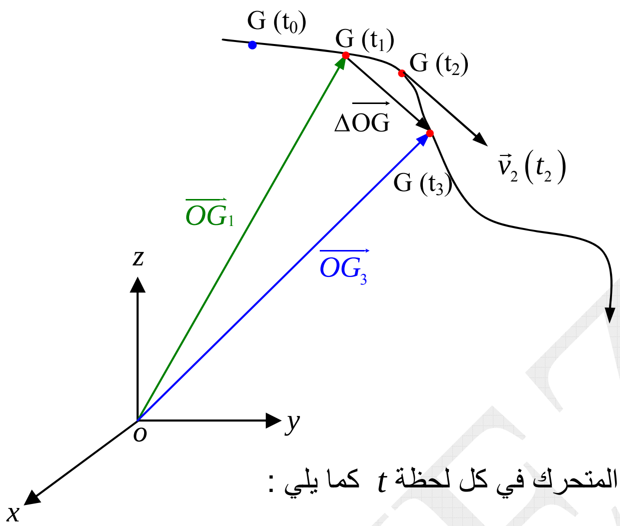
لا توجد قوى داخلية ممثلة في الشكل .

الجملة ( سيارة + عربة : C) القوى الخارجية هي :

$\vec{P}'$ ، $\vec{P}$ ، $\vec{f}'$ ، $\vec{f}$ ، $\vec{F}_{r/c}$ ، $\vec{F}_{r/v}$ ، $\vec{F}$

القوى الداخلية : $\vec{T}_{c/v}$ ، $\vec{T}_{v/c}$

## 2 - تحديد السرعة اللحظية في تسجيل لمسار متحرك




شعاع السرعة في اللحظة $t_2$ هو $\vec{v}_2 = \dfrac{\overrightarrow{OG_3} - \overrightarrow{OG_1}}{t_3 - t_1}$

شعاع السرعة يكون موازيا لشعاع الانتقال $\Delta\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_3} - \overrightarrow{OG_1}$

يكون تحديد $\vec{v}_2$ بأكثر دقة كلما اقتربت $t_3$ من $t_1$ ، وبالتالي :

شعاع السرعة اللحظية هو المشتق بالنسبة للزمن لشعاع الموضع $\overrightarrow{OG}$ .

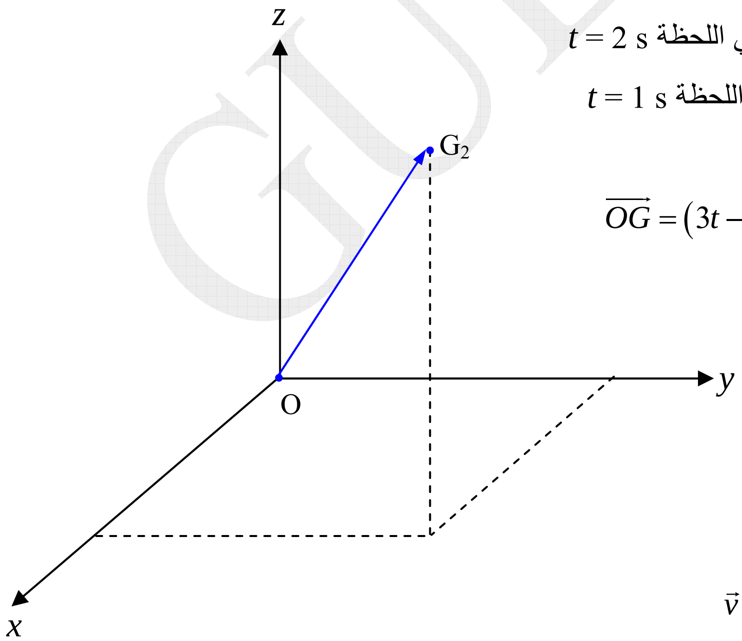
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

**مثال** : يتحرك جسم نعتبره نقطة في معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، تُعطى إحداثيات المتحرك في كل لحظة $t$ كما يلي :

$$z = t^2 + 2\,t \quad ، \quad y = 2\,t^2 - 1 \quad ، \quad x = 3\,t - 1$$

1 – اكتب عبارة شعاع الموضع ، ثم عيّن وضعية المتحرك في اللحظة $t = 2\ s$

2 – اكتب عبارة شعاع السرعة ، ثم احسب طويلة السرعة في اللحظة $t = 1\ s$




**الحل** :

1 - شعاع الموضع هو : $\overrightarrow{OG} = (3t-1)\vec{i} + \left(2t^2-1\right)\vec{j} + \left(t^2+2t\right)\vec{k}$

في اللحظة $t = 2\ s$ يكون $\overrightarrow{OG} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}$

2 – شعاع السرعة :

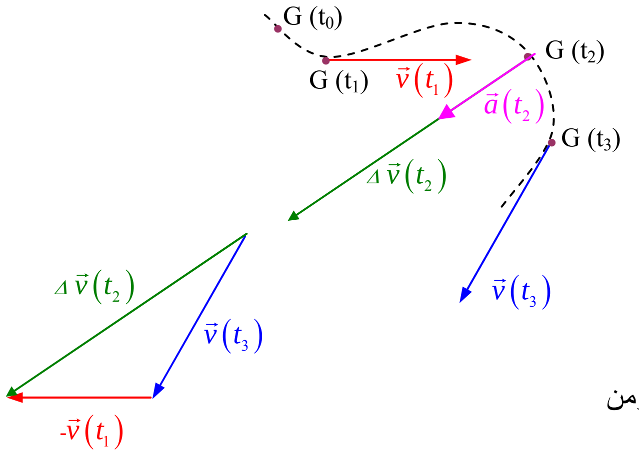
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4t\,\vec{j} + (2t+2)\vec{k}$$

في اللحظة $t = 1\ s$ يكون شعاع السرعة $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\,\vec{j} + 4\vec{k}$

طويلة السرعة $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{9+16+16} = 6{,}4\ m/s$

## 3 - شعــاع التسارع




يُعبّر شعاع التسارع عن تغير شعاع السرعة خلال الزمن .

شعاع التسارع محمول على شعاع التغير في السرعة $\Delta\vec{v}$ .

شعاع التسارع في اللحظة $t_2$ هو :

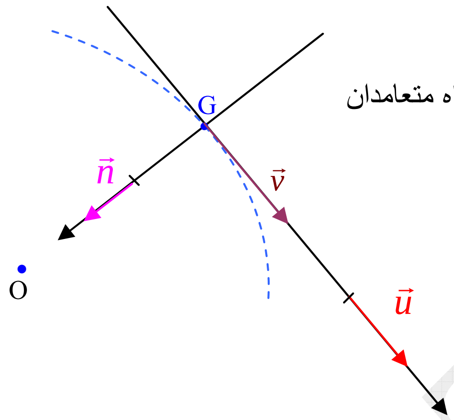
$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{t_3 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

كلما اقترب $t_3$ من $t_1$ كلما كان تحديد شعاع التسارع دقيقا أكثر .

عندما ينتهي $t_3$ نحو $t_1$ يصبح $\vec{a}$ مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

## 4 - التسارع المماسي والتسارع الناظمي (المركزي)




نعتبر متحركا G على مسار منحني ، ننسب حركته إلى معلم $(G,\vec{u},\vec{n})$ محوراه متعامدان

أحدهما يمس المسار في كل لحظة والآخر متجه نحو مركز المسار (O) .

شعاع السرعة يكون دائما محمولا على المماس ، ومنه نكتب :

$\vec{v} = v\,\vec{u}$ ، وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt}$$ ( شعاع الوحدة $\vec{u}$ متغير المنحى)

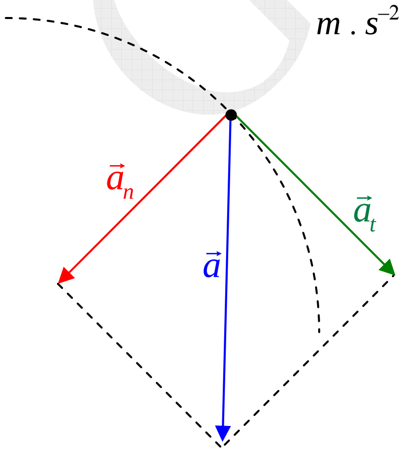
ومنه التسارع $\vec{a}$ عبارة عن تسارعين :

التسارع المماسي محمول على المماس : $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}$ طويلته $a_t = \dfrac{dv}{dt}$

التسارع الناظمي متجه نحو المركز ( فيسمى المركزي) $\vec{a}_n = v\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ ، طويلته تُقبل بدون برهان $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ .

حيث R هو نصف قطر المسار .

تحليل بعدي لعبارة التسارع : $[a] = \dfrac{\frac{[M]}{[T]}}{[T]} = \dfrac{[M]}{[T]^2} = [M][T]^{-2}$ ، ولهذا نقيس التسارع بـ $m\,.\,s^{-2}$




**الحركة المستقيمة** : $a_n = 0$ (يمكن اعتبار المستقيم دائرة نصف قطرها ما لا نهاية)

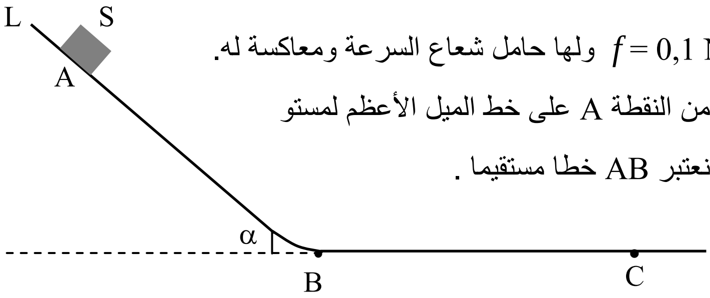
- **المنتظمة** : $a_t = 0$ .

- **المتغيرة بانتظام** : $a_t$ ثابت .

**الحركة الدائرية المنتظمة** : $a_t = 0$ ، $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

## 5 - تطبيقات قوانين نيوتن على الحركات الإنسحابية

**مثال – 1**




نعتبر الاحتكاك على المستوي المائل (L) مكافئا لقوة ثابتة شدتها $f = 0,1$ N ولها حامل شعاع السرعة ومعاكسة له.

نترك جسما صلبا S كتلته $m = 100$ g ينزل بدون سرعة ابتدائية من النقطة A على خط الميل الأعظم لمستو مائل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 30°$ . نهمل مقاومة الهواء ونعتبر AB خطا مستقيما .

نعتبر الجسم S نقطة مادية .

1 – مثّل كل القوى المؤثرة على الجسم بين A و B .

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بيّن أن حركة S متسارعة بانتظام ، ثم احسب تسارعه .

3 – احسب تسارع S بين A و B بتطبيق نظرية الطاقة الحركية .

4 – نعتبر المستوي الأفقي BC (L') أملس جدّا .

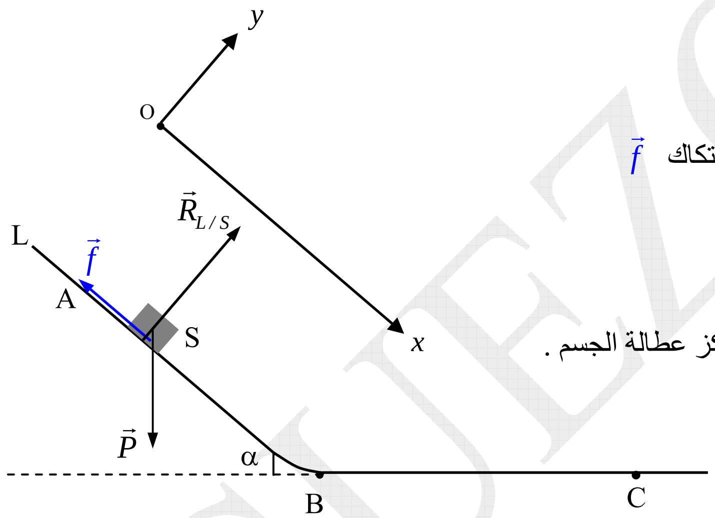
أ) مثّل القوى المؤثرة على S بين B و C .

ب) احسب سرعة S عند النقطة C علما أن المسافة AB = 70 cm .

5 – باعتبار قوة الاحتكاك على BC ثابتة شدتها $f' = 0,15\ N$ ومعاكسة لشعاع السرعة .

نعيد ترك الجسم S في النقطة A ، كم يجب أن تكون المسافة BC لكي يتوقف الجسم في النقطة C .

نأخذ g = 10 u .i




**الحل :**

**1** – القوى المؤثرة على S بين A و B : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$

قوة تأثير المستوي L على الجسم S $\vec{R}_{L/S}$ .

**2** – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن (نظرية مركز العطالة )

نسمي هذا القانون كذلك نظرية مركز العطالة ، لأنه لا يهتم إلا بمركز عطالة الجسم .

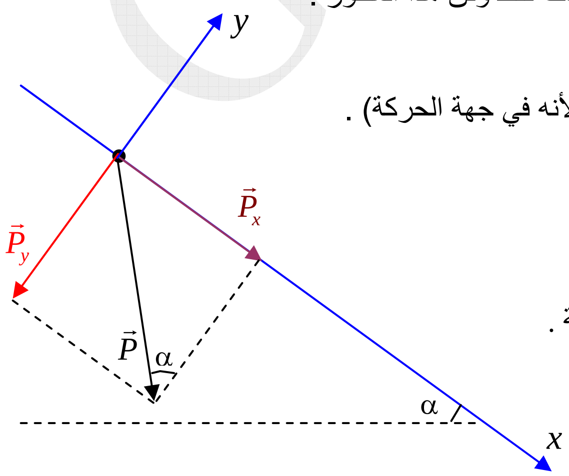
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R}_{L/S} + \vec{f} = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

نختار معلما لندرس فيه حركة الجسم S ، و نعتبر مدة الحركة قصيرة حتى يتسنى لنا إعتبار هذا المعلم غاليليا .

ليكن هذا المعلم هو (Ox , Oy) . نهتم فقط بالمحور Ox ، لأن الحركة تحدث فقط وفق هذا المحور .

نسقط العلاقة الشعاعية (1) على هذا المحور :




لدينا مسقط قوة الثقل على المحور Ox هو $P_x = P\sin\alpha$ (المسقط موجب لأنه في جهة الحركة) .

مسقط $\vec{R}_{L/S}$ معدوم لأن هذه القوة عمودية على Ox .

*مسقط* $\vec{f}$ سالب لأن هذه القوة معاكسة للمحور Ox .

$a$ : هي القيمة الجبرية للتسارع ، يمكن أن تكون موجبة ويمكن أن تكون سالبة .

وبالتالي نكتب : $P\sin\alpha - f = m\,a$

ومنه : $a = \dfrac{P\sin\alpha - f}{m}$ . نلاحظ أن المقادير : P ، α ، $f$ ، $m$ كلها ثابتة أثناء الحركة ، إذن التسارع ثابت ، وبالتالي حركة الجسم S متغيّرة بانتظـام .

$$a = \frac{0,1\times 10\sin 30 - 0,1}{0,1} = 4\ m.s^{-2}$$

**3** – بتطبيق نظرية الطاقة الحركية :

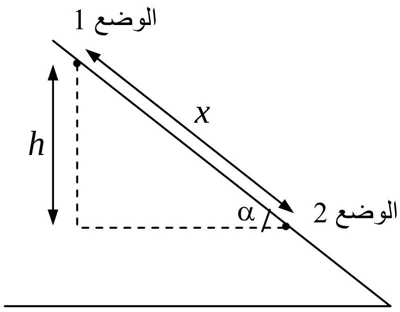
نعتبر في اللحظة $t$ أن المسافة التي يكون قد قطعها الجسم S هي $Ox = x$ (اعتبرنا الجسم نقطة مادية ، أي ليس له أبعاد ، لكن هذه النقطة لها كتلة هي كتلة الجسم S) .

في اللحظة $t$ تكون سرعة الجسم هي $v$ .

نظرية الطاقة الحركية (السنة الثانية) :

$E_{C_2} - E_{C_1} = \Delta E_c = \sum W\left(F_{ext+int}\right)$ ، التغيّر في الطاقة الحركية يساوي مجموع أعمال القوى الداخلية والخارجية .

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh - fx$$




من المعطيات $v_1 = 0$ ، ولدينا في الشكل المقابل $h = x\sin\alpha$ ، وبالتالي :

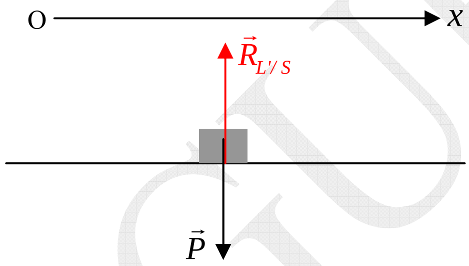
$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\ x\sin\alpha - fx \qquad (2)$$

عمل $\vec{R}_{L/S}$ معدوم لأن هذه القوة عمودية على الانتقال .

عمل $\vec{f}$ سالب لأنه مقاوم (جهة القوة عكس الانتقال) .

نشتق طرفي العلاقة (2) بالنسبة للزمن : $mva = mg\ v\sin\alpha - fv$ ، وبالتالي : $a = \dfrac{mg\sin\alpha - f}{m}$

**4** -




أ) تمثيل القوى على المستوي الأفقي

ب) لكي نحسب سرعة الجسم يجب أولا أن نعرف طبيعة الحركة .

بتطبيق نظرية مركز العطـالة :

$\vec{P} + \vec{R}_{L'/S} = m\vec{a}$ ، وباسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور Ox :

$0 + 0 = ma$ ، ومنه $a = 0$

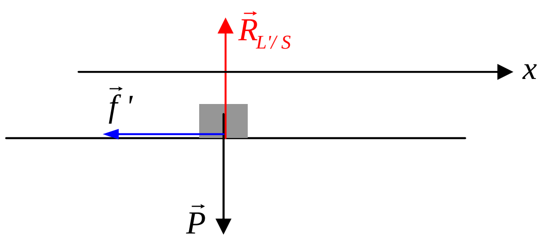
سرعة الجسم غير معدومة وتسارعه معدوم ، إذن فهو في حركة ، وحركته هذه تكون منتظمة .

ما دامت الحركة منتظمة ابتداء من النقطة B ، فإن سرعة الجسم في النقطة C هي نفسها السرعة في النقطة B .

حساب السرعة في النقطة B :

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ ، ولدينا $v_A = 0$ ، وبالتالي : $v_B^2 = 2\times 4\times 0,70 = 5,6$ ، ومنه $v_B = 2,36\ m/s = v_C$

**5** - بتطبيق نظرية مركز العطالة على الجسم S




$\vec{P} + \vec{R}_{L'/S} + \vec{f}\,' = m\,\vec{a}\,'$ ، وباسقاط هذه العلاقة على المحور Ox

$-f\,' = m\,a'$ ، وبالتالي $a' = -\dfrac{f\,'}{m}$

التسارع ثابت إذن الحركة متغيّرة بانتظام .

**ملاحظة** : نعلم أن الحركة تكون متسارعة بانتظام إذا كان $\vec{v}.\,\vec{a} > 0$ أو $v.\,a_t > 0$

متباطئة بانتظام إذا كان $\vec{v}.\,\vec{a} < 0$ أو $v.\,a_t < 0$

نحن لدينا في هذا المثال طويلة السرعة موجبة لأن الجسم S يتحرك في الجهة الموجبة للمحور ، أما طويلة التسارع ( والذي يمثل التسارع المماسي لأن الحركة مستقيمة ، تسارعها الناظمي معدوم) ، وجدناها سالبة ، لأن $f$ موجبة و $m$ موجبة .

وبالتالي يكون لدينا $v.\,a_t < 0$ ، إذن الحركة متباطئة بانتظام .

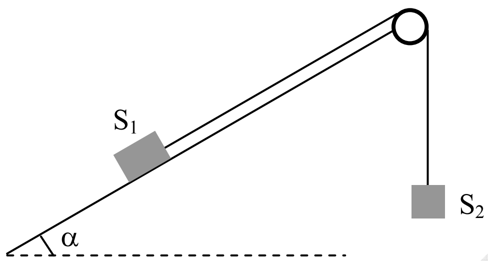
لكي نحسب المسافة BC نطبق العلاقة $v_C^{\,2} - v_B^{\,2} = 2a'(BC)$ (3)

ولدينا $v_B = 2{,}36$ m/s ، $v_C = 0$ (توقف الجسم)

$a' = -\dfrac{f'}{m} = -\dfrac{0{,}15}{0{,}1} = -1{,}5\ m.s^{-2}$ ، وبالتعويض في العلاقة (3) : $BC = \dfrac{-v_B^{\,2}}{2a'} = \dfrac{-5{,}6}{-2\times 1{,}5} = 1{,}86\ m$

**مثال 2**

تتكوّن جملة ميكانيكية من جسمين صلبين $S_1$ و $S_2$ موصولين بخيط خفيف جدا يمر على بكرة نعتبر كتلتها مهملة . يمكن للجسم $S_1$ أن ينسحب على مستو مائل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 30°$ .




نهمل الاحتكاك على المستوي المائل ، كما نهمل مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس في الهواء (نتعرّف على هاتين القوتين في الجزء الثاني من الدرس) .

كتلة الجسم $S_1$ : $M_1 = 300$ g وكتلة الجسم $S_2$ : $M_2 = 200$ g .

نأخذ $g = 10$ u .i .

**1** – عيّن جهة الحركة .

**2** – احسب تسارع $S_1$ و $S_2$ .

**الحل** :

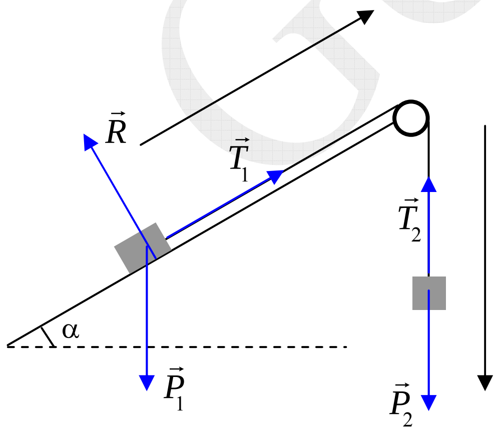
**1** – لتعيين جهة الحركة نقارن بين $P_2 = M_2\,g$ و $P_1 \sin\alpha = M_1 g \sin\alpha$

$P_2 = 0{,}2 \times 10 = 2$ N ، $P_1 \sin\alpha = 0{,}3 \times 10 \times 0{,}5 = 1{,}5$ N .

بما أن $P_2 > P_1 \sin\alpha$ ، إذن جهة الحركة تكون نحو اليمين ، أي في جهة $S_2$ .

2 - تسارع الجسم $S_1$ هو نفسه تسارع الجسم $S_2$ لأن الجملة مترابطة .

نمثل القوى المؤثرة على كل جسم .




بتطبيق نظرية مركز العطالة على كل جسم :

**الجسم $S_1$** :

$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{R} = M_1\vec{a}_1$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموازي للمستوي المائل :

$$T_1 - P_1 \sin\alpha = M_1 a_1 \qquad (1)$$

**الجسم $S_2$** :

$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = M_2\vec{a}_2$ ، وباسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي :

$$P_2 - T_2 = M_2 a_2 \qquad (2)$$

عندما تكون كتلة البكرة مهملة يكون $T_1 = T_2$ ، وبجمع المعادلتين (1) و (2) طرفا لطرف ، حيث أن $a_1 = a_2 = a$

نجد تسارع كل من الجسم $S_1$ و $S_2$ : $a = \dfrac{P_2 - P_1 \sin\alpha}{M_1 + M_2} = \dfrac{2-1,5}{0,5} = 1\ m.s^{-2}$

حذار : $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$ و $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$ ، لكن $T_1 = T_2$ و $a_1 = a_2$

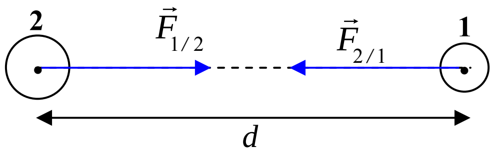
## 6 - حركة قمر صناعي حول الأرض

ننسب حركة الأقمار الصناعية إلى المرجع الأرضي المركزي .

### 1 – قانون الجذب العام :

يتجاذب جسمان كتلتاهما $M_1$ و $M_2$ البعد بينهما $d$ بقوة $F_{1/2} = F_{2/1} = G\dfrac{M_1 M_2}{d^2}$

حيث G هو ثابت الجذب العام ، أو نسميه الثابت الكوني وقيمته $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$

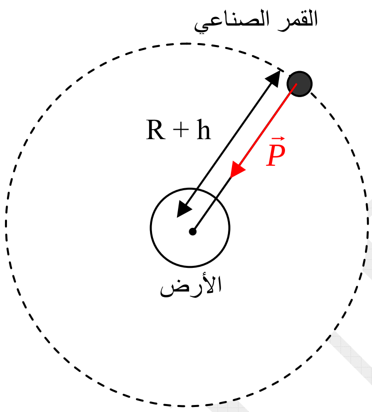



### 2 – القوى التي يخضع لها القمر الصناعي

يُحمل القمر الصناعي بواسطة مركبة فضائية إلى ارتفاع محدّد عن سطح الأرض ، ثم تُعطى له سرعة تمكنه من البقاء على مداره .

حينذاك يكون خاضعا لقوتين متعاكستين مباشرة ، هما قوة جذبه نحو مركز الأرض (ثقله) وقوّة الطرد المركزي الناتجة عن سرعته الكبيرة .

(لو فرضنا جدلا أن القمر الصناعي توقف عن الحركة ، سيسقط على سطح الأرض ، ولو أعطيت له سرعة أكبر من المحدّدة له يغادر مداره نحو كوكب آخر ).




قوة الطرد المركزي هي قوة وهمية ، أي أنها تظهر فقط أثناء الدوران .

(تشعر وأنت راكب في السيارة بقوة تحاول طردك نحو الخارج عندما تعبر السيارة منعطفا)

### 3 - سرعة القمر الصناعي

حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة ، أي تسارعه ناظمي ، فالقوة التي تجذبه نحو الأرض تكون مركزية ، وبالتالي

$$G\frac{mM_T}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \qquad (1)$$

حيث $m$ : كتلة القمر الصناعي ، $M_T$ : كتلة الأرض ، R : نصف قطر الأرض ، $h$ : الارتفاع بين القمر الصناعي وسطح الأرض .

من العلاقة (1) نستنتج

$$\boxed{v = \sqrt{G\frac{M_T}{R+h}}}$$

### 4 - دور القمر الصناعي : هو الزمن اللازم لكي يقوم القمر الصناعي بدور كاملة .

لدينا : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\dfrac{v}{R+h}} = \dfrac{2\pi(R+h)}{v}$ ، وباستعمال عبارة السرعة نجد : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{GM_T}}}$

### 5 - القمر الصناعي المستقر أرضيا

تُستعمل مثل هذه الأقمار في البث التلفزيوني ، وهي الأقمار التي تدور في جهة دوران الأرض ودورها يساوي دور الأرض .

في هذه الحالة يبقى دائما القمر فوق نفس النقطة من خط الإستواء أثناء دورانه .

**مثال :** على أي ارتفاع يجب وضع قمر صناعي مستقر أرضيا .

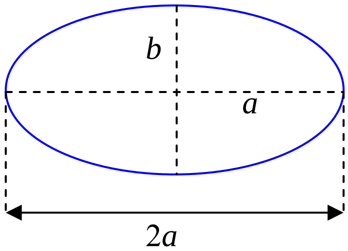
نصف قطر الأرض المتوسط $R = 6400\ km$ . كتلة الأرض $M_T = 6 \times 10^{24}\ kg$

**الحل :** لدينا $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{GM_T}}$ ، حيث $T = 24\ h = 24 \times 3600 = 86400\ s$ .

بتربيع طرفي العلاقة : $T^2 = 4\pi^2 \dfrac{(R+h)^3}{GM_T}$ ، ومنه $(R+h)^3 = \dfrac{T^2 GM_T}{4\pi^2}$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{(86400)^2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{40}} - 64 \times 10^5 \approx 36000\ km$$

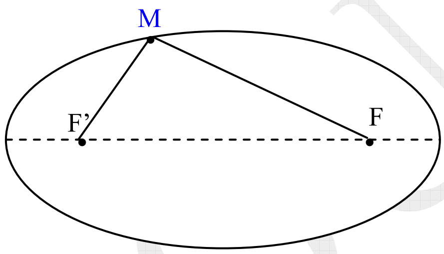
## 7 - قوانين كبلر




1 – **القطع الناقص** : هو شكل هندسي تحقق نقاطه M العلاقة $MF + MF' = 2\,a$

F ، F' هما محرقا القطع الناقص و $a$ هو نصف محوره الأكبر .

$b$ : هو نصف المحور الأصغر

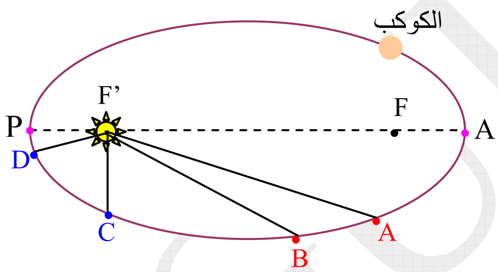



### 2 - القانون الأول

تدور الكواكب حول الشمس في مدارات إهليليجية ، بحيث يكون أحد محرقيها هو مركز الشمس ، وذلك في المرجع الشمسي مركزي

ونفس الشيء بالنسبة للأقمار الصناعية حول الأرض بحيث يكون مركز الأرض هو أحد محرقي مساراتها الإهليليجية ، وذلك في المرجع الأرضي المركزي .

**ملاحظة** : نعتبر أحيانا هذه المسارات دائرية .




### 3 - القانون الثاني (قانون المساحات)

المساحات التي يمسحها المستقيم الواصل بين مركز الكوكب ومركز الشمس تكون متساوية في مُدد زمنية متساوية . أي أن سرعة الكوكب تزداد عندما يقترب الكوكب من الشمس وتتناقص عندما يبتعد عنه .

المساحتان F'AB و F'CD متساويتان إذا كانت المدة التي يستغرقها الكوكب من A إلى B تساوي المدة التي يستغرقها من C إلى D .

سرعة الكوكب تكون عظمى بجوار النقطة P (تسمى هذه النقطة نقطة الرأس الأقرب) ، وتكون سرعته صغرى بجوار النقطة A (تسمى هذه النقطة نقطة الرأس الأبعد وتسمى كذلك الأوْج) .

### 4 - القانون الثالث

في مرجع شمسي مركزي تكون النسبة بين مربع دور الكوكب ومكعّب نصف المحور الأكبر للمسار دائما ثابتة ، أي أن بالنسبة لكوكبين سيارين مختلفين ، دور الأول $T_1$ ودور الثاني $T_2$ ، يكون دائما :

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = k$$

ونفس الشيء بالنسبة للأقمار الصناعية حول الأرض في المعلم الأرضي مركزي .

إذا اعتبرنا المسار دائريا يكون لدينا $\dfrac{T^2}{(R+h)^3} = k$ ، حيث $h$ هو بعد القمر الصناعي عن سطح الأرض

R هو نصف قطر الأرض .